PHYSICS

1. **(a):** यहाँ, $h_1 = 2$ cm, $u = -16$ cm

$h_2 = -3$ cm

(चूँकि प्रतिबिम्ब वास्तविक एवं उल्टा है)

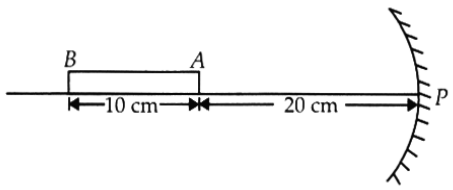
$\therefore \quad m = \dfrac{-h_2}{h_1} = \dfrac{v}{u}$

$\therefore \quad v = \dfrac{-h_2}{h_1} u = \dfrac{3}{2} \times (-16) = -24$ cm

अब, $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{v} + \dfrac{1}{u} = -\dfrac{1}{24} - \dfrac{1}{16} = \dfrac{-2-3}{48} = \dfrac{-5}{48}$

$f = \dfrac{-48}{5} = -9.6$ cm

2. **(d):**



यहाँ, $f = -10$ cm

सिरे A के लिए, $u_A = -20$ cm

सिरे A की प्रतिबिम्ब स्थिति, $\dfrac{1}{v_A} + \dfrac{1}{u_A} = \dfrac{1}{f}$

$\dfrac{1}{v_A} + \dfrac{1}{(-20)} = \dfrac{1}{(-10)}$ या $\dfrac{1}{v_A} = \dfrac{1}{-10} + \dfrac{1}{20} = -\dfrac{1}{20}$

$v_A = -20$ cm

सिरे B के लिए, $u_B = -30$ cm

सिरे B की प्रतिबिम्ब स्थिति, $\dfrac{1}{v_B} = \dfrac{1}{u_B} = \dfrac{1}{f}$

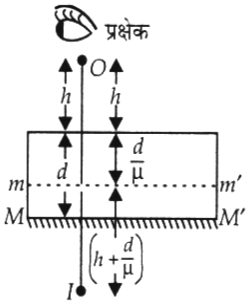
$\dfrac{1}{v_B} + \dfrac{1}{(-30)} = \dfrac{1}{(-10)}$ या $\dfrac{1}{v_B} = \dfrac{1}{-10} + \dfrac{1}{30} = -\dfrac{2}{30}$

$v_B = -15$ cm

प्रतिबिम्ब की लम्बाई,

$= |v_A| - |v_B| = 20$ cm $- 15$ cm $= 5$ cm

3. **(a):** चित्रानुसार, काँच का गुटका, तली का प्रतिबिम्ब बनाएगा अर्थात्, दर्पण MM' अपने सामने के पृष्ठ से $\left(\dfrac{d}{\mu}\right)$ गहराई पर इसलिए आभासी दर्पण mm' से वस्तु O की दूरी $h + \left(\dfrac{d}{\mu}\right)$ होगी।



अब एक समतल दर्पण समान दूरी पर दर्पण से पीछे प्रतिबिम्ब बनाता है क्योंकि वस्तु इसके सामने होती है, mm' से प्रतिबिम्ब I की दूरी $h + \left(\dfrac{d}{\mu}\right)$ होगी तथा चूँकि गुटके के सामने वाले पृष्ठ से आभासी दर्पण की दूरी $\left(\dfrac{d}{\mu}\right)$ है, प्रेक्षक के द्वारा देखे गये सामने वाले पृष्ठ से प्रतिबिम्ब I की दूरी होगी

$= \left(h + \dfrac{d}{\mu}\right) + \dfrac{d}{\mu} = h + \dfrac{2d}{\mu}$

4. **(b):** ${}^a\mu_g = \dfrac{\sin 60°}{\sin 35°}$ ...(i)

${}^a\mu_w = \dfrac{\sin 60°}{\sin 41°}$ ...(ii)

${}^w\mu_g = \dfrac{\sin 41°}{\sin \theta}$ ...(iii)

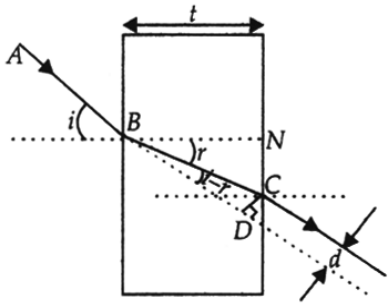
${}^a\mu_w \times {}^w\mu_g = {}^a\mu_g$; $\dfrac{\sin 60°}{\sin 41°} \times \dfrac{\sin 41°}{\sin \theta} = \dfrac{\sin 60°}{\sin 35°}$

((i), (ii) एवं (iii) के प्रयोग से)

$\sin \theta = \sin 35°$

$\theta = 35°$

5. **(c):**



चित्र से, समकोण त्रिभुज ΔCDB में,

$\angle CBD = (i - r)$

$\therefore \quad \sin (i - r) = \dfrac{CD}{BC} = \dfrac{d}{BC}$

या $d = BC \sin (i - r)$

समकोण त्रिभुज ΔCNB में,

$\cos r = \dfrac{BN}{BC} = \dfrac{t}{BC}$

या $BC = \dfrac{t}{\cos r}$

समीकरण (i) में समीकरण (ii) का मान रखने पर,

$d = \dfrac{t}{\cos r} \sin (i - r)$

छोटे कोणों के लिए $\sin (i - r) \approx i - r$, $\cos r \approx 1$

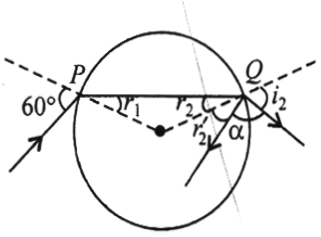
$d = t (i - r)$, $d = it \left(1 - \dfrac{r}{i}\right)$

6. **(c):** P पर अपवर्तन,

$\dfrac{\sin 60°}{\sin r_1} = \sqrt{3}$

$\sin r_1 = \dfrac{1}{2}$

या $r_1 = 30°$



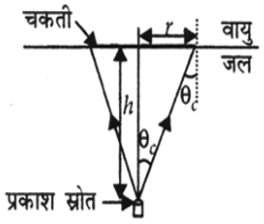
चूँकि, $r_2 = r_1 \quad \therefore \; r_2 = 30°$

Q पर अपवर्तन, $\frac{\sin r_2}{\sin i_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ या $\frac{\sin 30°}{\sin i_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ या $i_2 = 60°$

बिन्दु Q पर, $r_2' = r_2 = 30°$

$\therefore \alpha = 180° - (r_2' + i_2) = 180° - (30° + 60°) = 90°$

7. **(a):** चित्र सीमान्त प्रकरण के लिए क्रांतिक कोण θ_c पर जल के आयतन को दर्शाता है।



अब, $\sin\theta_c = \frac{1}{\mu}$

ताकि $\tan\theta_c = \frac{1}{(\mu^2 - 1)^{1/2}}$

चित्र से, $\tan\theta_c = \frac{r}{h}$

जहाँ r चकती की त्रिज्या है।

इस प्रकार, चकती का व्यास, $2r = 2h\tan\theta_C = \frac{2h}{(\mu^2 - 1)^{1/2}}$

8. **(b):** $\sin\theta = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{v}{v'}$

जहाँ v एवं v' क्रमश: माध्यम (i) एवं माध्यम (ii) में प्रकाश की चाल हैं।

$$v' = \frac{v}{\sin\theta}$$

9. **(b):** $\frac{\mu_2}{v} - \frac{\mu_1}{u} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{R}$ प्रयुक्त करने पर

यहाँ, $\mu_1 = 1, \mu_2 = 1.5, u = -50$ cm

$$\therefore \quad \frac{1.5}{v} - \frac{1}{(-50)} = \frac{(1.5-1)}{10}$$

$$\frac{1.5}{v} = 0.05 - 0.02 = 0.03$$

$\Rightarrow \quad v = 50$ cm

10. **(b):** समतलोत्तल लेंस की फोकस दूरी,

$$\frac{1}{f} = (1.5-1)\left(\frac{1}{+10} - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{1}{20}$$

समतलोत्तल लेंस की फोकस दूरी,

$$\frac{1}{f} = (1.5-1)\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{10}\right) = \frac{-1}{20}$$

चूँकि समानान्तर पुंज लेंस पर आपतित होता है, समतलोत्तल लेंस से इसका प्रतिबिम्ब इससे (फोकस पर) + 20 cm पर बनेगा तथा यह समतलोत्तल लेंस के लिए वस्तु के रूप में कार्य करेगा। चूँकि दो लेंस एक-दूसरे से 10 cm की दूरी पर हैं, इसलिए, अगले लेंस के लिए $u = +10$ cm

$$\therefore \quad v = \frac{uf}{u+f} = \frac{10\times 20}{10-20} = 20\text{ cm}$$

11. **(a):** $\frac{1}{f} = (\mu - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$

यहाँ, $f = \frac{2}{3}R, R_1 = +R, R_2 = -R$

$$\therefore \quad \frac{1}{(2/3)R} = (\mu-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right) = \frac{(\mu-1)\times 2}{R}$$

$$\mu - 1 = \frac{3}{4} = 0.75$$

$\Rightarrow \quad \mu = 1.75$

12. **(d):** चूँकि $\mu_2 > \mu_1$, ऊपरी आधा लेंस अपसरित होगा। चूँकि $\mu_1 > \mu_3$, निचला आधा लेंस अभिसरित होगा।

13. **(b):** लेंस मेकर सूत्र के अनुसार,

$$\frac{1}{f} = (\mu-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

यहाँ, $f = 20$ cm, $\mu = 1.55, R_1 = R$ एवं $R_2 = -R$

$$\therefore \quad \frac{1}{20} = (1.55-1)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{-R}\right) = 0.55\times\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right)$$

$$\frac{1}{20} = 0.55\times\frac{2}{R}$$

$$R = 1.1 \times 20 = 22\text{ cm}$$

14. C

15. **(c):** यहाँ, $u = -45$ cm, $v = 90$ cm

$$\therefore \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{1}{90} + \frac{1}{45} = \frac{1}{30}$$

$\Rightarrow \quad f = 30$ cm

जब सुई लेंस से दूर 5 cm घूम जाती है।

$u = -(45 + 5) = -50$ cm

$$\therefore \quad \frac{1}{v'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{u'} = \frac{1}{30} + \frac{1}{-50} = \frac{2}{150}$$

$v' = 75$ cm

$\therefore$ प्रतिबिम्ब का विस्थापन $= v - v' = 90 - 75 = 15$ cm, लेंस की ओर

16. **(d):** यहाँ, $\mu = 1.62, \delta = 4.8°$

$\delta = (\mu - 1)A$ के प्रयोग से,

$$A = \frac{\delta}{(\mu-1)} = \frac{4.8}{(1.62-1)} = 7.74°$$

17. **(c):** संयुक्त सूक्ष्मदर्शी का आवर्धन,

$$m = m_o \times m_e = \left(\frac{L}{f_o}\right)\times\left(\frac{D}{f_e}\right)$$

यहाँ, $L = 20$ cm, $D = 25$ cm (समीपस्थ बिन्दु), $f_o = 1$ cm एवं $f_e = 2$ cm

$$\therefore \quad m = \frac{20}{1}\times\frac{25}{2} = 250$$

18. **(d):** यहाँ $f_o = 50$ cm, $f_e = 5$ cm, $D = 25$ cm

जब स्पष्ट दृष्टि की न्यूनतम दूरी पर प्रतिबिम्ब बनता है तो दूरदर्शी

की लम्बाई,

$$L = f_o + \frac{f_e D}{f_e + D} = 50 + \frac{5\times 25}{5+25} = 50 + \frac{25}{6} = \frac{325}{6} \text{ cm}$$

19. **(c):** अभिदृश्यक दर्पण की फोकस दूरी,

$$f_o = \frac{R}{2} = \frac{80}{2} = 40 \text{ cm}$$

एवं नेत्रिका की फोकस दूरी = 1.6 cm

$$\therefore \text{ आवर्धन क्षमता, } m = \frac{f_o}{f_e} = \frac{40}{1.6} = 25$$

20. **(d):** यहाँ, $f_o = 1.5$ cm, $f_e = 6.25$ cm, $u_o = -2$ cm, $v_e = -25$ cm

अभिदृश्यक के लिए,

$$\frac{1}{v_o} - \frac{1}{u_o} = \frac{1}{f_o} \qquad \therefore \frac{1}{v_o} - \frac{1}{-2} = \frac{1}{1.5}$$

$$\frac{1}{v_o} = \frac{1}{1.5} - \frac{1}{2} \text{ या } v_o = 6 \text{ cm}$$

नेत्रिका के लिए, $\frac{1}{v_e} - \frac{1}{u_e} = \frac{1}{f_e}$

$$\frac{1}{-25} - \frac{1}{u_e} = \frac{1}{6.25}$$

$$-\frac{1}{u_e} = -\frac{1}{6.25} + \frac{1}{25} \text{ या } u_e = -5 \text{ cm}$$

दो लेंसों की बीच की दूरी $= |v_o| + |u_e|$

$= 6 \text{ cm} + 5 \text{ cm} = 11 \text{ cm}$

21	3	22	3	23	1	24	5	25	3

CHEMISTRY

26. (*b*) $Ca(OH)_2$ अस्थायी कठोर जल के मृदुकरण के लिए प्रयोग किया जाता है।

27. (*b*) '*A*' का सूत्र M_3N सुझाव करता है कि *M* एकसंयोजक धातु है।

$$\underset{(M)}{6Li} + N_2 \longrightarrow \underset{(A)}{2Li_3N} \xrightarrow{\Delta} 6Li + N_2$$

लीथियम नाइट्राइड

$$Li_3N + 3H_2O \longrightarrow 3LiOH + \underset{(B)}{NH_3}$$

$$CuSO_4 + 4NH_3 \longrightarrow [Cu(NH_3)_4]SO_4$$

नीला विलयन

अतः *M* तथा *B* क्रमशः Li व NH_3 हैं।

28. (*d*) क्षारीय धातुएँ हैलोजन से क्रिया करके हैलाइड बनाती है वे सामान्यतः M^+X^- द्वारा प्रदर्शित की जाती हैं।

29. (*b*) **यौगिक** *A* : CaO; *B* : $Ca(OH)_2$; *C* : $CaCO_3$; *D* : $Ca(HCO_3)_2$

$Ca(HCO_3)_2$ जल में विलेय है अतः यौगिक के विलयन में कार्बन डाइऑक्साइड अधिकता में प्रवाहित करने पर विलयन का दूधियापन नष्ट हो जाता है।

30. (*b*) $8LiH + Al_2Cl_6 \longrightarrow 2LiAlH_4 + 6LiCl$

$LiAlH_4 + 2BeCl_2 \longrightarrow 2BeH_2 + LiCl + AlCl_3$

31. (*a*) Li अपनी उच्च जालक ऊर्जा के कारण लगभग जल में अविलेय होता है किन्तु LiCl, Li आयन की उच्च जलयोजन ऊर्जा के कारण जल में विलेय होता है। LiCl अपनी सहसंयोजक प्रकृति के कारण ऐसीटोन में भी विलेय होता है। (क्योंकि सहसंयोजक लक्षण ऋणायन का आकार बढ़ने पर बढ़ता है।)

$$LiF < LiCl < LiBr < LiI$$

32. (*b*) (i) BeO की जालक ऊर्जा इसकी जलयोजन ऊर्जा से अधिक होती है। अतः यह जल मे अविलेय है जबकि $BeSO_4$ की जलयोजन ऊर्जा इसकी जालक ऊर्जा से अधिक है अतः यह जल में शीघ्र विलेय है।

(ii) BaO की जालक ऊर्जा इसकी जलयोजन ऊर्जा से बहुत कम है अतः यह जल में विलेय है। $BaSO_4$ में जालक ऊर्जा जलयोजन ऊर्जा पर हावी है अतः यह जल में अविलेय है।

(iii) LiI अधिकतम् सहसंयोजक है क्योंकि Li^+ सबसे छोटा होता है तथा एनायन $(I)^-$ को अधिकतम् मात्रा में ध्रुवित करता है। अतः यह एथेनॉल में KI की अपेक्षा अधिक विलेय है।

33. (*c*) (i) परॉक्साइड जल से क्रिया करके H_2O_2 देते हैं।

$$O_2^{2-} + 2H_2O \longrightarrow 2OH^- + H_2O_2$$

(ii) सुपरऑक्साइड जल से क्रिया करके H_2O_2 व O_2 देते हैं।

$$2O_2^- + 2H_2O \longrightarrow 2OH^- + H_2O_2 + O_2$$

34. (*c*) (i) $2Mg(s) + O_2(g) \xrightarrow{\Delta} 2MgO(s)$

$$3Mg(s) + N_2(g) \longrightarrow Mg_3N_2(s)$$

(ii) $\underset{\text{सिलिका}}{CaO(s) + SiO_2(s)} \longrightarrow \underset{\text{कैल्सियम सिलिकेट}}{CaSiO_3(s)}$

(iii) बिना बुझा चूना क्लोरीन से अभिकृत होकर कैल्सियम हाइपोक्लोराइट $Ca(OCl)_2$ देता है।

$$\underset{\text{बुझा चूना}}{2Ca(OH)_2} + 2Cl_2 \longrightarrow \underbrace{CaCl_2 + Ca(OCl)_2}_{\text{ब्लीचिंग पाउडर}} + 2H_2O$$

(iv) $2Ca(NO_3)_2(s) \xrightarrow{\Delta} 2CaO(s) + 4NO_2(g) + O_2(g)$

35. (*d*) **सोडियम धातु** यह गलित NaCl (40%) व $CaCl_2$ 60% मिश्रण का 873 K पर डाउन सेल में विद्युत अपघटन करके बनाया जाता है। कैथोड पर मुक्त हुआ सोडियम मिट्टी के तेल में संग्रहित कर लिया जाता है जबकि Cl_2 ऐनोड पर मुक्त होती है।

$$NaCl(l) \xrightarrow{\text{विद्युत अपघटन}} Na^+ + Cl^-$$

कैथोड पर $Na^+ + e^- \longrightarrow Na(l)$

ऐनोड पर $2Cl^- \longrightarrow Cl_2(g) + 2e^-$

प्राप्त Na धातु ऑक्सीकरण पर Na_2O_2 देती है।

सोडियम हाइड्रॉक्साइड यह NaCl के जलीय विलयन (ब्राइन) का वैद्युत अपघटन करके कास्टर कैलनर सेल में मर्करी कैथोड व कार्बन ऐनोड के रूप में प्रयोग करके बनाया जाता है। कैथोड पर निर्मुक्त सोडियम धातु मर्करी से संयुक्त होकर सोडियम अमलगम बनाती है। Cl_2 गैस ऐनोड पर मुक्त होती है।

कैथोड पर $Na^+ + e^- \xrightarrow{Hg} Na$ अमलगम

ऐनोड पर $2Cl^- \longrightarrow Cl_2 + 2e^-$

36. (*d*) प्लास्टर ऑफ पेरिस जलयोजन प्रक्रम द्वारा अत्यन्त कठोर हो जाता है यह जल के साथ मिलाने पर एक कठोर ढेर जिप्सम में बदल जाता है। इस प्रक्रम में आयतन में थोड़ी-सी वृद्धि होती है।

$$\underset{\text{प्लास्टर ऑफ पेरिस}}{CaSO_4\cdot\frac{1}{2}H_2O} + 1\frac{1}{2}H_2O \longrightarrow \underset{\text{जिप्सम}}{CaSO_4\cdot 2H_2O} + \text{ऊष्मा}$$

37. (*d*) प्लास्टर ऑफ पेरिस का जमना एक ऊष्माक्षेपी प्रक्रम है।

$$CaSO_4\cdot\frac{1}{2}H_2O \xrightarrow{H_2O} \underset{\text{ऑर्थोरोम्बिक}}{CaSO_4\cdot 2H_2O} \xrightarrow{\text{गर्म करने पर}} \underset{\text{मोनोऑर्थोरोम्बिक जिप्सम}}{CaSO_4\cdot 2H_2O}$$

38. (*c*) $$\underset{\text{जिप्सम}}{2(CaSO_4\cdot 2H_2O)} \xrightarrow[\text{निर्जलीकरण}]{120^\circ C} \underset{\text{प्लास्टर ऑफ पेरिस}}{2CaSO_4\cdot H_2O} + 3H_2O$$

39. (*d*) जिप्सम का सूत्र $= CaSO_4\cdot 2H_2O$

प्लास्टर ऑफ पेरिस का सूत्र $= CaSO_4\cdot\frac{1}{2}H_2O$

जल अणुओं का अन्तर $= 2H_2O - \frac{1}{2}H_2O = 1\frac{1}{2}H_2O$

40. (*d*) अनार्द्र कैल्सियम क्लोराइड प्रयोगशाला में उदासीन गैसों के तीव्र शुष्कन के लिए प्रयोग किया जाता है।

41. (*b*) **जिप्सम सीमेण्ट में मिलने** पर ट्राइकैल्सियम ऐलुमिनेट से संयोजन **करके इसके जमने** की दर को कम करता है।

$$3CaO\cdot Al_2O_3 + 3CaSO_4 + 2H_2O \longrightarrow 3CaO\cdot Al_2O_3\cdot 3CaSO_4\cdot 2H_2O$$

अतः जमने का समय बढ़ जाता है।

42. (*c*) **चूने का दूध बुझे हुए चूने का जल में निलम्बन है।**

43. (*a*) $$\underset{\text{बुझा हुआ चूना}}{Ca(OH)_2} + Cl_2 \longrightarrow \underset{\text{विरंजक चूर्ण}}{CaOCl_2} + H_2O$$

$Ca(OH)_2$ रंगहीन होता है और सीमेण्ट के निर्माण में प्रयोग नहीं होता। यह अपने रोगाणुनाशी प्रकृति के कारण सफेदी (पुताई) में प्रयोग होता है।

44. (*c*) **क्योंकि *A* का विलयन CO_2 के साथ दूधियापन उत्पन्न करता है अतः यह चूने का जल अर्थात् $Ca(OH)_2$ का विलयन होना चाहिए।**

45. (*a*) क्षारीय धातुओं में समूह में नीचे की ओर जाने पर आयनन ऊर्जा कम होने के कारण क्रियाशीलता घटती है अतः क्षारीय धातुओं में अधिकतम आयनन ऊर्जा लीथियम की है इसलिए यह कम क्रियाशील है और जल से कम तीव्रता से क्रिया करता है।

46. (*c*) जैसे-जैसे क्षारीय धातुओं का आकार बढ़ता है वैसे ही संयोजी इलेक्ट्रॉन व केन्द्रक के बीच की दूरी बढ़ती है अर्थात् केन्द्रक संयोजी इलेक्ट्रॉनों को कम प्रबलता से बाँधता है। अत संयोजी इलेक्ट्रॉन को निकालनें के लिए आवश्यक ऊर्जा (आयनन ऊर्जा) घटती हैं।

$\therefore$ IE का क्रम है $Li > Na > K > Rb$

47. (*a*) क्षार धातुओं की आयनन ऊर्जा निम्न होती है।

48. (*a*) सोडियम को द्रव अमोनिया में घोलने पर इसका रंग अमोनिकृत इलेक्ट्रॉन उत्पन्न होने के कारण गहरा नीला हो जाता है।

$$Na + (x+y)NH_3 \longrightarrow [Na(NH_3)_x]^+ + \underset{\text{विलयित या अमोनिकृत इलेक्ट्रॉन}}{e(NH_3)_y}$$

49. (*d*) $2Na + 2H_2O \longrightarrow 2NaOH + H_2\uparrow$

$2NaOH + CO_2 \longrightarrow Na_2CO_3 + H_2O$

$Na_2CO_3 + 2HCl \longrightarrow 2NaCl + H_2O + CO_2$

$$\underset{\text{गलित}}{NaCl} \xrightarrow{\text{विद्युत अपघटन}} Na^+ + Cl^-$$

$Na^+ \xrightarrow{+e^-} Na$, $\quad Cl^- \xrightarrow{-e^-} Cl$

50. (*a*) **Li अन्य प्रथम समूह की धातुओं से बहुत अधिक मुलायम होनी चाहिए वास्तव में Li अन्य क्षारीय धातुओं से कठोर है।**

MATHEMATICS

51. (*c*) माना $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + 7\hat{\mathbf{k}}$ तथा $\mathbf{b} = 7\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + 8\hat{\mathbf{k}}$, तब **b** पर **a** का प्रक्षेप

$$\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \left\{\frac{(\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + 7\hat{\mathbf{k}})\cdot(7\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + 8\hat{\mathbf{k}})}{\sqrt{7^2 + (-1)^2 + 8^2}}\right\}$$

$$= \left\{\frac{1\times 7 + 3\times(-1) + 7\times 8}{(\sqrt{49+1+64}}\right\} = \frac{7-3+56}{\sqrt{114}} = \frac{60}{\sqrt{114}}$$

अतः सदिश $(\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + 7\hat{\mathbf{k}})$ का सदिश $(7\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + 8\hat{\mathbf{k}})$ पर प्रक्षेप $\frac{60}{\sqrt{114}}$ है।

52. (*a*) दिया है, $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = 8$ तथा $|\mathbf{a}| = 8|\mathbf{b}|$

$\Rightarrow \quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = 8$

$\Rightarrow \quad |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = 8 \quad (\because \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$ तथा $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a})$

$\Rightarrow \quad (8|\mathbf{b}|)^2 - |\mathbf{b}|^2 = 8 \Rightarrow 63|\mathbf{b}|^2 = 8 \quad$ (दिया है, $|\mathbf{a}| = 8|\mathbf{b}|$)

$\Rightarrow \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{\frac{8}{63}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{7}}$

तथा $\quad |\mathbf{a}| = 8|\mathbf{b}| = 8\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{7}}\right) = \frac{16}{3}\sqrt{\frac{2}{7}}$

53. (*c*) यदि **a**, **b** तथा **c** एक मात्रक सदिश है, तब $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1$ का प्रयोग करते हुए $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$ का विस्तार करके हम $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ का मान ज्ञात करेंगे।

दिया है, $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1$ तथा $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = 0$

$\because (\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = 0$

$\Rightarrow \quad \mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) + \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) + \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = 0$

$\Rightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{c} = 0$

$\Rightarrow \quad |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 + 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{a}) = 0$

$(\because \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$ और $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a})$

$\Rightarrow \quad 1 + 1 + 1 + 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{a}) = 0 \quad (\because |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1)$

$\Rightarrow \quad 3 + 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{a}) = 0 \Rightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} = -\frac{3}{2}$

54. (*d*) माना *XY*- तल में *OP*, *X*- अक्ष से 30°, *Y*-अक्ष से 60° तथा *Z*- अक्ष से 90° का कोण बनाता है।

अतः *OP* सदिश की दिक् कोज्याएँ $\cos 30^\circ$, $\cos 60^\circ$ तथा $\cos 90^\circ$ हैं।

अर्थात् $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0$ अतः $\mathbf{OP} = \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{j}}$

$$|\mathbf{OP}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

जोकि XY-तल में अभीष्ट मात्रक सदिश हैं।

55. (b) दिया है, $\lambda\mathbf{b} + \mathbf{c} = \lambda(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}) + (\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}})$

$$= (\lambda + 1)\hat{\mathbf{i}} + (\lambda + 3)\hat{\mathbf{j}} - (2\lambda + 1)\hat{\mathbf{k}}$$

$\because \quad \mathbf{a} \perp (\lambda\mathbf{b} + \mathbf{c}),\ \mathbf{a} \cdot (\lambda\mathbf{b} + \mathbf{c}) = 0$

$\Rightarrow \quad (2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) \cdot [(\lambda + 1)\hat{\mathbf{i}} + (\lambda + 3)\hat{\mathbf{j}} - (2\lambda + 1)\hat{\mathbf{k}}] = 0$

$\Rightarrow \quad 2(\lambda + 1) - (\lambda + 3) - (2\lambda + 1) = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda = -2$

56. (a) सदिश $\mathbf{a}$ पर $\mathbf{b}$ का प्रक्षेप

$$\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{(2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) \cdot (\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}})}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{2}{3}$$

57. (a) दिया गया सदिश $\lambda\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{i}} + \lambda\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$ तथा $2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \lambda\hat{\mathbf{k}}$ समतलीय है, तब $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda(\lambda^2 - 1) - (\lambda + 2) + 2(-1 - 2\lambda) = 0$

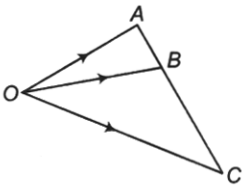
$\Rightarrow \quad \lambda^3 - \lambda - \lambda - 2 - 2 - 4\lambda = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda^3 - 6\lambda - 4 = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda^2(\lambda + 2) - 2\lambda(\lambda + 2) - 2(\lambda + 2) = 0$

$\Rightarrow \quad (\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\lambda - 2) = 0, \lambda = -2$

58. (a) माना दिए गए बिन्दु A, B, C है, माना O मूलबिन्दु है



तब, $\mathbf{OA} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$

$\mathbf{OB} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 4\mathbf{c}$

तथा $\mathbf{OC} = -7\mathbf{b} + 10\mathbf{c}$

अब, $\mathbf{AC} = \mathbf{OC} - \mathbf{OA}$

$= (-7\mathbf{b} + 10\mathbf{c}) - (\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c})$

$= -\mathbf{a} - 5\mathbf{b} + 7\mathbf{c}$

$\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA}$

$= (2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 4\mathbf{c}) - (\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}) = \mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 7\mathbf{c}$

$\therefore \quad \mathbf{AB} = -\mathbf{AC} = (-1) \times \mathbf{AC} =$ अदिश $\times \mathbf{AC}$

अतः बिन्दु A, B, C समरेखीय हैं।

59. (b) हमें दिया है, $[\mathbf{a} + \mathbf{b}\ \mathbf{b} + \mathbf{c}\ \mathbf{c} + \mathbf{a}]$

$= \{(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})\} \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{a})$

$= (\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{a})$

$= (\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{a}) \quad (\because \mathbf{b} \times \mathbf{b} = 0)$

$= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{c}$

$+ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$

$= [\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}] + 0 + 0 + 0 + 0 + [\mathbf{b}\ \mathbf{c}\ \mathbf{a}]$

$(\because [\mathbf{a}\ \mathbf{c}\ \mathbf{c}] = 0, [\mathbf{b}\ \mathbf{c}\ \mathbf{c}] = 0, [\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{a}] = 0, [\mathbf{a}\ \mathbf{c}\ \mathbf{a}] = 0)$

$= [\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}] + [\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}] = 2[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]$

60. (c) $(\mathbf{d} + \mathbf{a}) \cdot [\mathbf{a} \times \{\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})\}]$

$= (\mathbf{d} + \mathbf{a}) \cdot [\mathbf{a} \times \{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d}\}]$

$= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\,[\mathbf{d} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c})] - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\,[\mathbf{d} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{d})]$

$+ (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\,[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c})] - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\,[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{d})]$

$= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\,[\mathbf{d}\ \mathbf{a}\ \mathbf{c}] = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\,[\mathbf{a}\ \mathbf{c}\ \mathbf{d}]$

61. C

62. (c) $[\mathbf{b} \times \mathbf{c}\ \mathbf{c} \times \mathbf{a}\ \mathbf{a} \times \mathbf{b}]$

$= [(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot [(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})]$

$= (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot [\{(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}\}\mathbf{a} - \{(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a}\}\mathbf{b}]$

$= (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot [(\mathbf{c}\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})\mathbf{a} - (\mathbf{c}\ \mathbf{a}\ \mathbf{a})\mathbf{b}]$

$= (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}] - 0$

$= [\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]\,[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}] = [\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]^2$

63. (c) अभिलम्ब रूप में समतल की समीकरण

$$\frac{xx_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} + \frac{yy_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} + \frac{zz_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

$\therefore \quad xx_1 + yy_1 + zz_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$

64. (a) AB के दिक् अनुपात 1, 2, 4 हैं।

AC के दिक् अनुपात $-2, -1, 1$ हैं।

समतल ABC के अभिलम्ब के दिक् अनुपात $2, -3, 1$ हैं, समतल ABC का समीकरण $2x - 3y + z = 0$ है।

माना अभीष्ट समतल का समीकरण $2x - 3y + z = k$ है, तब

$$\left|\frac{2 \times 1 - 3 \times 1 + 1 - k}{\sqrt{4 + 9 + 1}}\right| = 3$$

$\Rightarrow \quad k = \pm 3\sqrt{14}$

65. (a) दिया है कि $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ सदिश इस प्रकार हैं

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = 0$$

समतल P_1, सदिश $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ से बनता है

$\therefore$ अभिलम्ब सदिश $\mathbf{n}_1 = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$

समतल P_2, सदिश $\mathbf{c}$ तथा $\mathbf{d}$ से निर्मित हैं।

$\therefore$ अभिलम्ब सदिश $\mathbf{n}_2 = \mathbf{c} \times \mathbf{d}$

$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = 0$

$\Rightarrow \quad \mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2$

अतः समतल समान्तर है।

अतः दोनों के बीच कोण 0 है।

66. (b) प्रथम रेखा का समीकरण निम्न है,

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z - 3}{4} = \lambda \quad \text{(माना)}$$

$\Rightarrow \quad x = 2\lambda + 1, y = 3\lambda + 2$ तथा $z = 4\lambda + 3$

अतः रेखा पर स्थित व्यापक बिन्दु के निर्देशांक $(2\lambda + 1, 3\lambda + 2, 4\lambda + 3)$ हैं।

द्वितीय रेखा का समीकरण निम्न है,

$$\frac{x - 4}{5} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 0}{1} = \mu \text{ (माना)}$$

$\Rightarrow \quad x = 5\mu + 4, y = 2\mu + 1, z = \mu$

अतः रेखा पर स्थित व्यापक बिन्दु के निर्देशांक $(5\mu + 4, 2\mu + 1, \mu)$ हैं।

यदि रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं, तो उनका एक उभयनिष्ठ बिन्दु होता हैं। अतः λ तथा μ के कुछ मानों के लिए,

$2\lambda + 1 = 5\mu + 4, 3\lambda + 2 = 2\mu + 1$ तथा $4\lambda + 3 = \mu$

$\Rightarrow \quad 2\lambda - 5\mu = 3, 3\lambda - 2\mu = -1, 4\lambda - \mu = -3$

प्रथम दो समीकरणों को हल करने पर,

$\lambda = -1$ तथा $\mu = -1$

चूँकि $\lambda = -1$ तथा $\mu = -1$ तृतीय समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं।
अतः दी गई रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं।

$(2\lambda + 1, 3\lambda + 2, 4\lambda + 3)$ में $\lambda = -1$ रखने पर प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक $(-1, -1, -1)$ हैं।

67. C

68. (a) दिया गया समतल निम्न है, $\mathbf{r} \cdot (\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}}) + 9 = 0$

जिसका कार्तीय समीकरण $x + 2y - 5z + 9 = 0$ है।
$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ रखने पर, समतल के लम्बवत् रेखा के दिक् अनुपात $(1, 2, -5)$ हैं। यदि यह रेखा बिन्दु $(1, 2, 3)$ से होकर जाती हो , तब रेखा का समीकरण निम्न है,

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-5} \quad \left(\because \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}\right)$$

उपरोक्त समीकरण का सदिश रूप निम्न है

$$\mathbf{r} = (1\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}) + \lambda(1\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}})$$

जहाँ, λ वास्तविक संख्या है।

69. . (d) दी गई रेखाएँ निम्न हैं,

$$\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1} \text{ तथा } \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$$

पहली रेखा के दिक् अनुपात $(7, -6, 1)$ तथा यह बिन्दु $(-1, -1, -1)$ से होकर जाती है। अतः दी गई रेखा का सदिश समीकरण निम्न है,

$$\mathbf{r}_1 = -\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}} + \lambda(7\hat{\mathbf{i}} - 6\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})$$

इसी प्रकार, दूसरी रेखा का सदिश समीकरण निम्न है,

$$\mathbf{r}_2 = 3\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}} + 7\hat{\mathbf{k}} + \mu(\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})$$

जोकि समीकरण $\mathbf{r}_1 = \mathbf{a}_1 + \lambda\,\mathbf{b}_1$ तथा $\mathbf{r}_2 = \mathbf{a}_2 + \mu\,\mathbf{b}_2$ के रूप में है।

जहाँ, $\mathbf{a}_1 = -\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{b}_1 = 7\hat{\mathbf{i}} - 6\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$

तथा $\mathbf{a}_2 = 3\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}} + 7\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{b}_2 = \hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$

अब, $\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 = (3\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}} + 7\hat{\mathbf{k}}) - (-\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}})$

$$= 4\hat{\mathbf{i}} + 6\hat{\mathbf{j}} + 8\hat{\mathbf{k}}$$

तथा $\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 7 & -6 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \hat{\mathbf{i}}(-6 + 2) - \hat{\mathbf{j}}(7 - 1) + \hat{\mathbf{k}}(-14 + 6)$$

$$= -4\hat{\mathbf{i}} - 6\hat{\mathbf{j}} - 8\hat{\mathbf{k}}$$

$$|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2| = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2 + (-8)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 36 + 64} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$$

∴ दी गई रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी d निम्न है,

$$d = \left|\frac{(\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) \cdot (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)}{|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2|}\right| = \frac{|(-4\hat{\mathbf{i}} - 6\hat{\mathbf{j}} - 8\hat{\mathbf{k}}) \cdot (4\hat{\mathbf{i}} + 6\hat{\mathbf{j}} + 8\hat{\mathbf{k}})|}{2\sqrt{29}}$$

$$= \frac{|(-4) \times 4 + (-6) \times 6 + (-8) \times 8|}{2\sqrt{29}}$$

$$= \frac{|-16 - 36 - 64|}{2\sqrt{29}}$$

$$= \frac{116}{2\sqrt{29}} = \frac{58}{\sqrt{29}} = 2\sqrt{29} \text{ इकाई}$$

70. (a) ∵ बिन्दुओं $(2, 3, 4)$ व $(6, 7, 8)$ को मिलाने वाली रेखा का मध्य-बिन्दु $(4, 5, 6)$ है।

यह बिन्दु समीकरण $x + y + z - 15 = 0$ को सन्तुष्ट करता है।

∴ $x + y + z - 15 = 0$ अभीष्ट तल का समीकरण है।

71	4	72	0	73	3	74	9	75	0